MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

3. Matrices

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico, que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, las ciencias sociales, las ingenierías, economía, física, estadística y las diferentes ramas de las matemáticas entre las que destacamos las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y, por supuesto, el álgebra. (Steegmann et al)

Los objetivos del tema son:

- Conocer algunos tipos de matrices.
- Conocer las principales operaciones con matrices.

3.1 Conceptos de matrices

Definición de matriz

Los arreglos rectangulares de números como el siguiente $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 0.4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

reciben el nombre de matrices. Más formalmente, dado un conjunto X, se denomina **matriz de n filas y m columnas** a un conjunto de n×m elementos de X, dispuestos en un arreglo rectangular de n filas y m columnas. Las características de los elementos del conjunto X dependerán, en cada caso, de la naturaleza del problema que se esté estudiando. X puede ser un conjunto de funciones, de palabras de un alfabeto, de números, etc. De aquí en adelante, salvo que se especifique lo contrario, los elementos del conjunto X serán números reales y denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden n×m (n filas y m columnas) por $M_{n\times m}$.

En general, para representar una matriz A de orden n×m se escribe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También se escribe A=(a_{ij}) (i = 1,..., n y j = 1,..., m) para indicar que A es la matriz de orden n×m que tiene elementos a_{ij} . Las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con la misma letra minúscula acompañada de dos subíndices que indican su posición en la matriz; el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna. Es decir, el elemento aij es aquel que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz A. Por ejemplo, si denotamos por M la matriz inicial, entonces el orden de M es 2×3 (2 filas y 3 columnas) y sus elementos son:m_{11} =8, m_{12} =−1, m_{13} =0, m_{21} =5, m_{22} =0.5 y m_{23} =3.

Dos matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}), de orden n×m, son iguales si a_{ij} = b_{ij} para todo i = 1,..., n y j =1,...,m. Es decir, dos matrices son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

Algunos tipos de matrices

Matriz Cuadrada: Es aquella que tiene igual número n de filas que de columnas (n=m). En ese caso se dice que la matriz es de orden n. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n. Así, en el ejemplo anterior, $A \in M_3$. Los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada son aquellos que están situados en la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha. En otras palabras, la diagonal principal de una matriz A=(a_{ij}) está compuesta por los elementos a_{11}, a_{22},..., a_{nn}. En el ejemplo anterior la diagonal principal está compuesta por los elementos: a_{11} =1, a_{22} =−3, a_{33} =1.

Matriz Nula: Una matriz es nula si todos sus elementos son iguales a cero. En el siguiente ejemplo se muestra la matriz nula de orden 3×2.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz nula, respecto a la adición y multiplicación de matrices, juega un papel similar al número cero respecto a la adición y multiplicación de números reales.

Matriz Diagonal: Una matriz cuadrada, A=(a_{ij}), es diagonal si a_{ij} =0, para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Unidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos 1. A continuación mostramos la matriz unidad de orden 2.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz unidad, respecto a la multiplicación de matrices, juega un papel similar al número 1 respecto a la multiplicación de números reales.

Matriz triangular: Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz es triangular:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices también se conoce como matriz escalonada. En algunos casos se hace la distinción entre las matrices triangulares superiores o inferiores en dependencia de los elementos nulos de la matriz; los que están por debajo o por encima de la diagonal principal.

Más adelante, después de estudiar las operaciones con matrices, veremos algunos tipos importantes de matrices como es el caso de las simétricas y las ortogonales.

3.2 Operaciones con matrices

Adición de matrices

Sean A,B $\in M_{n\times m}$. La matriz C = (c_{ij}) $\in$ $M_{n\times m}$ es la suma de las matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), y se denota C = A+ B, si sus elementos cumplen:

$C_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (i=1, 2, 3, 4…,n j=(1, 2, 3, 4,…,10)

Ejemplos:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B son de orden 3×2, mientras la matriz M es cuadrada de orden 3. Por tanto, no podemos calcular la suma de A y M y tampoco la suma de B y M, en cambio, sí podemos sumar A y B ya que tienen el mismo orden.

Esto es,

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4 & 4+4 \\ (-1)+2 & 3+4 \\ 0+(-1) & 2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es fácil deducir las siguientes propiedades de la adición de matrices de orden n×m:

- Conmutativa: $A+B=B+A, \qquad \forall A,B \in M_{n\times m}$
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C, \qquad \forall A,B,C \in M_{n\times m}$
- Elemento neutro (la matriz nula): $\exists O \in M_{n\times m} \quad \forall A \in M_{n\times m}: \quad A+O=O+A=A$
- Elemento opuesto: $\forall A \in M_{n\times m} \quad \exists(-A) \in M_{n\times m}: \quad A+(-A)=(-A)+A=O$

En virtud de las propiedades anteriores de la adición de matrices, “+”, (ley interna) resulta que ($M_{n\times m}$,+) tiene estructura de grupo conmutativo.

Se denomina producto de una matriz, A = (a_{ij}) ∈ $M_{n\times m}$ por un número λ a una matriz B=(b_{ij}) ∈ $M_{n\times m}$ cuyos elementos son de la forma $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ (i = 1,...,n; j = 1,...,m)

Es decir, la matriz producto, B, es la que se obtiene multiplicando el número λ por cada uno de los elementos de A. De aquí en adelante consideraremos que λ es un número real.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ y el número λ=-5. Entonces, el producto de A por λ es: $\lambda A=(-5)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & -20 \\ -25 & -35 & 0 \end{pmatrix}$

El producto de una matriz por un número es una ley de composición externa que cumple las siguientes propiedades:

- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de matrices

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \ \forall \ \lambda \in R, \forall \ A, B \in M_{n\times m}$$

- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de números reales

$$(\lambda + \delta)A = \lambda A + \delta A \quad \forall \ \lambda, \delta \in R, \forall A \in M_{n\times m}$$

- Asociativa mixta $(\lambda\cdot\delta)A=\lambda(\delta A)$ ∀ λ, δ ∈R, ∀ A ∈ $M_{n\times m}$
- Elemento neutro para la ley externa

$$1\cdot A = A \ \forall \ A \in M_{n\times m} \text{ y } 1 \in R$$

- En virtud de estas propiedades y de las anteriores de la suma de matrices, resulta que el conjunto $M_{n\times m}$ de las matrices de orden n×m, respecto a la ley de composición interna, “+”, y a la ley de composición externa, producto de una matriz por un número, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Multiplicación de matrices

Se denomina ***matriz producto*** *de la matriz A* = (a_{ij})∈$M_{n\times m}$ *por la matriz B* = (b_{jk}) ∈ $M_{m\times p}$ a una matriz *C* = (c_{ik}) ∈ $M_{n\times p}$ cuyos elementos son de la forma $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} +\ldots+ a_{im} b_{mk} = \sum a_{ij}\, b_{jk}$

Es decir, los elementos que ocupan la posición *ik,* en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila *i* en la primera matriz por los elementos de la columna *k* de la segunda matriz. Observemos en detalle como se obtiene el elemento c_{23} en el siguiente ejemplo:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \boxed{2 \quad -1}\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & \boxed{5}\\ -2 & 0 & \boxed{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 14\\ 0 & 4 & \boxed{7}\\ -8 & 0 & 12\end{pmatrix}=C$$

fila 2 por **columna 3** = elemento que ocupa la **posición 23**

$$c_{23}=\sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j3}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}=2\cdot 5+(-1)\cdot 3=10-3=7$$

Nota: Dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columna de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. En ese caso se dice que las matrices son enlazadas. En el siguiente ejemplo podemos ver además cuál es el orden de la matriz producto.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 6\end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 6\end{pmatrix}_{3\times 4}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}_{4\times 2}=\begin{pmatrix}19 & 23\\ 7 & 10\\ 19 & 13\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$4=4$

Nótese, además, que no podemos calcular B·A.

$$\cancel{B\cdot A}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\\0&2\\3&2\end{pmatrix}_{4\times 2}\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&2&2&1\\0&1&0&6\end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Hay casos, como veremos en el siguiente ejemplo, en los que se pueden calcular ambos productos aunque se obtienen resultados diferentes.

Consideremos las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&2&3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\\3&0\end{pmatrix}$$

Entonces, por un lado,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\1&3\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&17\\11&8\end{pmatrix}$$

y por otro,

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\7&9&11\\12&9&6\end{pmatrix}$$

Según se pudo comprobar a través de los ejemplos anteriores, para la multiplicación de matrices no se cumple la propiedad conmutativa. Veamos algunas propiedades de esta operación:

- Asociativa
  $A(B\cdot C)=(A\cdot B)C, \qquad \forall A,\ B,\ C:\ A\in M_{n\times m},\ B\in M_{m\times k},\ C\in M_{k\times p}$

- Elemento neutro (Es la matriz unidad)
  $\exists I\in M_n \quad \forall A\in M_n: \qquad A\cdot I=I\cdot A=A$

- Distributiva (mixta)
  $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C, \qquad \forall A,B,C:\ A\in M_{n\times m} \quad B,C\in M_{m\times k}$

En virtud de estas propiedades y de las anteriores de la suma de matrices, resulta que el conjunto (Mn,+,·) de las matrices cuadradas de orden n, respecto a las dos leyes de composición interna, "+" y "·", tiene estructura de anillo unitario no conmutativo.

Otras observaciones importantes:

Existen divisores de cero: En general, $A \cdot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No se cumple la propiedad cancelativa: En general, $A \cdot B = A \cdot C$ no implica $B = C$.
Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Referencias

Steegmann C. & et al. Álgebra de matrices. Recuperado de http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Algebra_Matrices.pdf